RANKIN-COHEN BRACKET を用いた概正則保型形式の構成について

堀永 周司

Abstract. Pitale, Saha と Schmidt によるランクが 2 の概正則ジーゲル保型形式の生成する $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-加群の分類が存在する. 本稿では各加群が概正則保型形式のなす空間の中で実現が可能かを保型形式の構成を通じて議論する. その構成には Rankin-Cohen bracket とアイゼンシュタイン級数を用いる.

1. 導入

保型形式の構成は保型形式論における基本的な問題の一つといえる. 例として, テータ関数, アイゼンシュタイン級数や Rankin-Cohen 括弧積がある. 本稿では Rankin-Cohen 括弧積を用いて概正則保型形式を構成する.

[9, section 7] において, 志村氏はアイゼンシュタイン級数の解析的な性質に関する問題を提起した. その問題を考察するために概正則保型形式が志村氏により定義された. 例えば, 重さが 2 のアイゼンシュタイン級数 E_2 は概正則保型形式の典型例である. そのフーリエ係数は

$$E_2(z) = \frac{3}{\pi\,\mathrm{Im}(z)} - 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d|n} d)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,nz), \qquad z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

で表される. E_2 のときと非常に似たような形で重さが $(n+3)/2$ の概正則な次数 n のジーゲルアイゼンシュタイン級数が志村氏により構成された. 著者は [3, Theorem 5.5] においてそのアイゼンシュタイン級数の生成するリー環の表現を決定した. その結果によると, そのアイゼンシュタイン級数が生成する表現は長さが 2 の可約な表現となる.

概正則保型形式は "どのくらい" 存在するだろうか. 概正則保型形式が正則保型形式に Maass-Shimura 微分作用素とよばれる微分作用素を施して得られるかどうかは, その概正則保型形式が生成するリー環の表現の既約性に関わってくる. 上記のように一般に, 概正則保型形式が生成するリー環の表現は既約とはならない. そこで, Pitale, Saha と Schmidt は概正則保型形式が生成しうるリー環の表現の分類を一変数保型形式と次数 2 のジーゲル保型形式の場合に行った (cf. [6, 7]). では, 概正則保型形式がどの程度存在するか, という問いは表現の適当な意味での表現の重複度を計算することに他ならない. そこで, 本稿では可約なリー環の表現を生成する概正則保型形式の構成を行う. それにより, 特定の表現の重複度が正であることが導かれる.

$\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ のリー環とする. 今, $\mathfrak{H} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})/K_\infty$ はエルミート対称空間である. ここで, K_∞ は $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群であり, 基点 $\mathbf{i} \in \mathfrak{H}$ は K_∞ に対応する点とする. このとき, 次の分解が存在する:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_-.$$

ここで, 部分リー環 $\mathfrak{k}$ は極大コンパクト部分群 K_∞ のリー環の複素化であり, $\mathfrak{p}_+$ (resp. the Lie subalgebra $\mathfrak{p}_-$) は $\mathfrak{H}_n$ の基点 $\mathbf{i}$ に関する正則接空間 (resp. 反正則接空間) に対応するリー環である. 上記の分解はベクトル空間としての直和であるが, リー環としては直和でないことに注意されたい.

$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を満たすウェイト $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ を $\mathfrak{k} \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の既約表現で, 最高ウェイト λ を持つものとする. $\mathfrak{p}_-$ が自明に作用することで, ρ を $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}$ の既約表現とみなす. 以下, リー環 $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ の普遍包絡環とする. ここで, 最高ウェイト λ をもつ generalized Verma module $N(\lambda)$ を

$$N(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k})} V_\lambda$$

により定義する. $N(\lambda)$ は一意の既約商 $L(\lambda)$ を持つ. $N(\lambda)^\vee$ を [4, §3.2] の意味での $N(\lambda)^\vee$ の反傾表現とする. $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$-加群として $N(\lambda)^\vee|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ に $N(\lambda)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ は同型である. [7, Proposition 4.27] により, $n = 2$ のとき, $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ 上の概正則保型形式の空間に現れる直既約だが可約な表現は $N(m+1, 1)^\vee$ に同型となる. 一般の n において半整数の場合も含めると, 次が分かる:

Theorem 1.1 (Theorem 5.5 [3])**.** E^* を志村氏の構成した次数 n のジーゲルアイゼンシュタイン級数とする. このとき, E^* は $\mathfrak{g}$-加群として $N((n-1)/2, \ldots, (n-1)/2)^\vee$ を生成する.

$n = 2$ とすると, アイゼンシュタイン級数 E^* はウェイトが 5/2 であり, $N(1/2, 1/2)^\vee$ を生成する. この事実は Rankin-Cohen 括弧積で概正則保型形式を構成する重要な事実となっている.

Rankin-Cohen 括弧積は保型形式を構成する強力な手法の一つである. 例えば, 次節で解説するが, 青木-伊吹山によるウェイトが 35 の尖点形式の構成が有名であろう (cf. [1]). そのほか, Rankin-Cohen 括弧積の公式については様々なものが知られている ([5, 12]). 本稿では, 概正則保型形式に対する Rankin-Cohen 括弧積を考察する. 誤解を恐れずにいうと, Rankin-Cohen 括弧積はリー環の表現のテンソル積の分岐則とみることが出来る. その考えのもと, 概正則保型形式が生成する $\mathfrak{g}$-加群などのテンソル積表現を考察する. そして, そのテンソル積の分岐則を計算し, Rankin-Cohen 括弧積を構成する.

本稿で考えるテンソル積とは,

$$M = L(1/2, 1/2) \otimes N(1/2, 1/2)^{\vee}$$

というものである. ここで, $L(1/2, 1/2)$ は長さが 2 の加群 $N(1/2, 1/2)^{\vee}$ のただ一つの既約部分表現である. 表現の分岐則を計算することで, $N(1+m, 1)^{\vee}$ と同型な表現を生成する M の元を決定する. その元を用いることで Rankin-Cohen 括弧積 $[\,,\,]_m$ が構成され, $N(1+m, 1)^{\vee}$ を生成しうる概正則保型形式を構成できるようになる. D_- を普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の元で, section 2 で定義されるものとする. このとき, 自然に, D_- は次数 2 のジーゲル上半平面上の微分作用素と理解できる. これらのもとで, 次を証明した:

Theorem 1.2 (Theorem 5.2)**.** E^* を志村氏の構成した次数 2, ウェイト 5/2 のジーゲルアイゼンシュタイン級数とする. このとき, 正の偶数 m に対して, 保型形式 $[D_- E^*, E^*]_m$ は 0 ではなく, $N(1+m, 1)^{\vee}$ を生成する.

定理により, 正の偶数に対して $N(1+m, 1)^{\vee}$ の概正則保型形式の空間における重複度が 0 ではないことが分かった. このような加群の概正則保型形式の空間への実現が示されたのは初であると考えられる.

2. Rankin-Cohen bracket の例と構成方法

本節では Rankin-Cohen bracket と表現の関係について具体例を述べる.

2.1. リー環の表現と Rankin-Cohen bracket の関係. 端的に述べると, Rankin-Cohen bracket とは, テンソル積表現の分岐則のことをいう. なぜそのように見なせるのかを以下で解説していく.

n を正の整数とする. ここで, G_n をランクが n のシンプレクティック群, $\mathfrak{H}_n$ をジーゲル上半平面とする. つまり,

$$\mathfrak{H}_n = \{z \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

と定める. 以下では G_n は $\mathbb{Z}$ 上の代数群とみる. (ρ, V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現とし, Γ を $G_n(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする. このとき, 正則関数 $f\colon \mathfrak{H}_n \longrightarrow V$ が Γ に関する重さ ρ の保型形式であるとは, 次の二条件を満たすことである:

(1) $f(\gamma(z)) = \rho(cz+d) f(z), \qquad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma, z \in \mathfrak{H}_n,$
(2) f はすべてのカスプについて緩増加.

ケッヒャー原理より, $n > 1$ のとき, 条件 (1) が成り立てば自動的に (2) も成立する. $M_\rho(\Gamma)$ を Γ に関する重さ ρ の保型形式全体とする. 上記定義において正則から C^∞-級関数に条件を緩めたものを Γ に関する重さが ρ の C^∞-級保型形式という. それを $C^\infty(\mathfrak{H}, \rho)^\Gamma$ とかく.

f を重さ ρ の Γ に関する保型形式とする. このとき, $f^\rho\colon G(\mathbb{R}) \longrightarrow V$ を

$$f^\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \rho(c\,\mathbf{i} + d)^{-1} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\mathbf{i})\right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_n(\mathbb{R})$$

と定める. このとき, f^ρ は Γ に関する左移動について不変. V の双対 V^* の元 v^* に対して, 自然な pairing $\langle v^*, f^\rho \rangle$ を考えることにより, $G_n(\mathbb{R})$ 上の複素数値関数が得られる. また, $\mathcal{A}(\Gamma)$ を $G_n(\mathbb{R})$ 上の保型形式全体とする. このとき, $\mathcal{A}(\Gamma)_\rho$ を $\mathcal{A}(\Gamma)$ の部分空間で

$$\langle k \cdot \varphi, k \in K \rangle \cong \rho$$

を満たす保型形式 φ 全体とする. このとき, 上記より, ρ が既約のとき $f \otimes v^* \longmapsto \langle v^*, f^\rho \rangle$ が同型

$$C^\infty(\mathfrak{H}, \rho)^\Gamma \otimes V^* \cong \mathcal{A}(\Gamma)_{\rho^*} \tag{2.1}$$

を誘導する. 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現は完全可約なので (必要があれば表現空間の基底を固定することで) 上記の同型を通じて群上の関数とみることができる.

次に, [11, section 12] に従って $\mathfrak{H}_n$ 上の微分作用素を導入する. 先に簡単な表現論からの準備を行う. (ρ, V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 上の有限次元表現とする. このとき, 非負整数 p に対して $\rho \otimes \tau^p$ と $\rho \otimes \sigma^p$ を以下のように定義する. $T = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ とし, $S_p(T, V)$ を対称な p-次多重線形写像 $T \times \cdots \times T \longrightarrow V$ とする. ここで $T \times \cdots \times T$ は T の p 個直積である. このとき, $h \in S_p(T, V)$ に対して,

$$(\rho \otimes \tau^p(a)h)\,(u_1, \ldots, u_p) = \rho(a) h({}^t a u_1 a, \ldots, {}^t a_p u_p a_p) \tag{2.2}$$

$$(\rho \otimes \sigma^p(a)h)(u_1, \ldots, u_p) = \rho(a) h(a^{-1} u_1 {}^t a^{-1}, \ldots, a_p^{-1} u_p {}^t a_p^{-1}) \tag{2.3}$$

と定義する．ここで, ρ が自明表現のとき, 表現 $\rho\otimes\tau^p$ と $\rho\otimes\sigma^p$ を単に τ^p と σ^p とそれぞれかく．言い換えると, このように定義した τ^p や σ^p の ρ とのテンソル積表現を多重線形写像の空間 $S_p(T,V)$ 上に実現したものが上記 $\rho\otimes\tau^p$ や $\rho\otimes\sigma^p$ である．よく知られているように, τ^p は次のように既約表現に分解する．$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$ が $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n$ を満たすとする．このとき, 最高ウェイト理論より対応する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現を単に λ とかく．すると,

$$\tau^p\cong\bigoplus_{\substack{\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in(2\mathbb{Z}_{\geq0})^n\\ \mu_1\geq\cdots\geq\mu_n,\mu_1+\cdots+\mu_n=2p}}\mu$$

がなりたつ．とくに, 重複度自由な分解である．しかし, 一般には $\rho\otimes\tau^p$ は重複度自由な分解を持たない．また, σ^p は τ^p の反傾表現であり, 上記とよく似た重複度自由な分解をもつ．

T の $\mathbb{C}$ 上の基底を適当に固定する．その基底を $\{\varepsilon_\nu\}_\nu$ とかく．上記基底に対して $u\in T$ に対して $u=\sum_\nu u_\nu\varepsilon_\nu$ と $z\in\mathfrak{H}_n$ に対して $z=\sum_\nu z_\nu\varepsilon_\nu$ と表す．このとき, 微分作用素 $D,\overline{D},C$ と E を次のように定める．C^∞ 級関数 $f\in C^\infty(\mathfrak{H}_n,V)$ と $u\in T, z\in\mathfrak{H}_n$ に対して

$$(Df)(u)=\sum_\nu u_\nu\partial f/\partial z_\nu,\qquad (\overline{D}f)(u)=\sum_\nu u_\nu\partial f/\partial\overline{z}_\nu \tag{2.4}$$

$$(Cf)(u)(z)=4(Df)(yuy)(z),\qquad (Ef)(u)(z)=4(\overline{D}f)(yuy)(z) \tag{2.5}$$

により $S_1(T,V)$ に値を持つ C^∞ 級関数 $Df,\overline{D}f,Cf$ と Ef を定義する．ただし, y は z の虚部である．非負整数 p に対して微分作用素 $D^p,\overline{D}^p,C^p$ と E^p を

$$D^pf=DD^{p-1}f,\qquad \overline{D}^pf=\overline{DD}^{p-1}f,\qquad D^0f=\overline{D}^0f=f \tag{2.6}$$

$$C^pf=CC^{p-1}f,\qquad E^pf=EE^{p-1}f,\qquad C^0f=E^0f=f \tag{2.7}$$

により定義する．このとき, 新たな微分作用素 $D^p_\rho f\in C^\infty(\mathfrak{H}_n,S_p(T,V))$ を

$$D^p_\rho f(u)(z)=(\rho\otimes\tau^p)(y)C^e(\rho(y)f)$$

により定義する．ただし, y は $z\in\mathfrak{H}_n$ の虚部である．$n=1$ の場合に具体例をみる．このとき, 対応するジーゲル上半空間は単なる上半平面そのものである．また, $T=\mathbb{C}$ となる．(ρ,V) として, $V=\mathbb{C}$ と $\rho=\det^k$ をとる．このとき,

$$Cf(u)(z)=4y^2u\partial f/\partial z,\qquad Ef(u)(z)=4uy^2\partial f/\partial\overline{z} \tag{2.8}$$

である．したがって,

(2.9)
$$D_\rho f(u)(z)=y^{-k}C(y^kf)(u)(z)=-2u\sqrt{-1}\,\frac{k}{y}f(z)+4u\frac{\partial f}{\partial z}(z)=-2u\sqrt{-1}\,\left(\frac{k}{y}f(z)+2\sqrt{-1}\,\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right)$$

をえる．これら $D_\rho f$ や Ef はまさにそれぞれ weight raising operator と weight lowing operator に一致している．ここで,

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

である．このとき次が成立する．

Proposition 2.1 (Proposition 7.3 [10])**.** (ρ,V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現とする．このとき, $f\in C^\infty(\mathfrak{H}_n,V)$ と $u\in T$ に対して

$$\iota_+(u)(f^\rho)=(D_\rho f)^{\rho\otimes\tau}(u),\qquad \iota_-(u)f^\rho=(Ef)^{\rho\otimes\sigma}(u)$$

が成り立つ．ただし,

$$\iota_+(u)=\frac{1}{2}\beta\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\,u\\0&0\end{pmatrix}\beta^{-1},\qquad \iota_-(u)=\frac{1}{2}\beta\begin{pmatrix}0&0\\-\sqrt{-1}\,u&0\end{pmatrix}\beta^{-1},\qquad \beta=\begin{pmatrix}-\sqrt{-1}\,\mathbf{1}_n&\sqrt{-1}\,\mathbf{1}_n\\ \mathbf{1}_n&\mathbf{1}_n\end{pmatrix}$$

と定めている．

良く知られているように, $\mathfrak{p}_+=\iota_+(T),\mathfrak{p}_-=\iota_-(T)$ とかくと, $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}_++\mathfrak{k}+\mathfrak{p}_-$ と分解する．ここで, $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G_n)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C},\mathrm{Lie}(K)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}=\mathfrak{k}$ である．$\mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{H}_n$ の $\mathbf{i}$ における正則接空間に, $\mathfrak{p}_-$ は $\mathbf{i}$ における反正則接空間に自然に同型である．上記命題により, 群上の関数へのリー環の作用は上半平面上の関数への微分作用素 D_ρ や E の作用と同一視される．$n=2$ の場合の微分作用素 D_ρ や E の明示式については [7] を参照されたい．

C^∞ 級関数 $f\in C^\infty(\mathfrak{H}_n,V)$ が概正則とは, ある ℓ が存在して $E^\ell f=0$ となることとする．すると, これまでの議論から, 群上の関数 f^ρ が $\mathfrak{p}_-$-有限であること, つまり, ある ℓ が存在して $(\mathfrak{p}_-)^\ell f^\rho=0$ に同値である．f が正則関数の場合は f^ρ が $\mathfrak{p}_-f^\rho=0$ を満たすことに等しい．また, [11, section 13.11] により,

$f \in C^\infty(\mathfrak{H}_n, V)$ が概正則であるとは, ある有限個の正則関数 g_ℓ と $n(n+1)/2$ 変数の多項式 $P_\ell, 1 \le \ell \le m$ が存在して

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^{m} P((r_{i,j}(z))_{1\le i\le j\le n}) g_\ell(z)$$

と書けることに同値である. ここで, $r_{i,j}(z)$ は行列 $\mathrm{Im}(z)^{-1}$ の (i,j)-成分である.

まとめると, 概正則保型形式の微分作用素における振る舞いは全て同型 (2.1) とリー環 $\mathfrak{g}$ の表現を通じて理解される. そのため, 表現論の側での操作が及ぼす (上半空間上の) 保型形式への影響を調べることで, 新しい保型形式側での操作が得られる. そのような例として Rankin-Cohen 括弧積が存在する. 具体的には, 表現論側では表現のテンソル積を考え, それの分岐則をみる. つまり, 二つの (群上の) 保型形式が生成する $\mathfrak{g}$ の表現を π_1 と π_2 とし, $\pi_1 \otimes \pi_2$ が離散直和 $\bigoplus_\ell \Pi_\ell$ に同型であるとき, 写像 $\pi_1 \otimes \pi_2 \longrightarrow \Pi_\ell$ が得られる. このとき, Π_ℓ の特定の元を (上半空間上の) 保型形式として明示的にに書き下したものが Rankin-Cohen 括弧積である. 正則保型形式の場合においては, それら特定の元はいわゆる lowest weight ベクトルないしは, minimal K-type と呼ばれるものを生成するベクトルをとることが多い. 本稿は通常と異なる正ルート系をとるため, lowest weight ベクトルではなく highest weight ベクトルになることに注意されたい. 以下の節で Rankin-Cohen 括弧積の例をあげる.

2.2. $n=1$ の場合. 本節では一変数の保型形式に対する Rankin-Cohen 括弧積の具体例を挙げる.

$\mathfrak{H}$ を複素上半平面とする. 整数 k に対して, $\mathfrak{H}$ 上の微分作用素 R_k と L_k を

$$R_k = \frac{k}{y} + 2\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial z}, \qquad L_k = -2\sqrt{-1}\,y^2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

により定める. L_k は定義より明らかに k によらないが, 便宜上 k によるように表記している. また, $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して

$$R_k^{(\ell)} = R_{k+2\ell-2} \circ \cdots \circ R_{k+2} \circ R_k, \qquad L_k^{(\ell)} = L_{k-2\ell+2} \circ \cdots \circ L_{k-2} \circ L_k$$

とおく. すると, ウェイト k の概正則保型形式 f に対して, $R_k^\ell f$ と $L_k^\ell f$ はそれぞれウェイトが $k+2\ell$ と $k-2\ell$ になる. また, 概正則保型形式 f が正則であることと, $L_k f = 0$ は同値.

ウェイト k の正則保型形式 f とウェイト ℓ の正則保型形式 g と正の偶数 m に対して, Rankin-Cohen 括弧積 $[f,g]_m$ を

$$\sum_{r+s=m} (-1)^r \binom{m+k-1}{r} \binom{m+\ell-1}{s} \frac{\partial^r}{\partial z^r} f \,\frac{\partial^s}{\partial z^s} g \tag{2.10}$$

と定義する. このとき, $[f,g]_m$ はウェイトが $k+2\ell+m$ の正則保型形式である.

次に表現論の立場から見てみよう. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の基底を

$$H = -\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

ととる. このとき, 明らかに, $[H,R] = 2R$, $[H,L] = -2L$, $[R,L] = H$ が成り立つ. ここで, $\mathbb{C}\cdot H$ をカルタン部分代数, L を正ルートベクトルになるように正ルート系をとる. D_k と D_ℓ をそれぞれ最高ウェイトが $k \ge 1$ と $\ell \ge 1$ の既約表現とする (後の正ルートの取り方は同じだが, 通常の取り方と異なることに注意). D_k と D_ℓ の最高ウェイトベクトルをそれぞれ v, w とかく. すると, テンソル積表現

$$D_k \otimes D_\ell$$

の分岐則は次で与えられる:

$$\sum_{r+s=m} (-1)^r \binom{m+k-1}{r} \binom{m+\ell-1}{s} R^r v \otimes R^s w.$$

この公式はまさに (2.10) のものと同じである. このように, Rankin-Cohen 括弧積は表現論と非常に相性が良いものになっている.

2.3. $n=2$ の場合. 本節では青木-伊吹山による重さ 35 の cusp form χ_{35} の構成について述べる (cf. [1]).

はじめにルートベクトルを定義しておく:

$$Z = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & i \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{1+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \\ i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{1-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -1 \\ -i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{0+} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_{0-} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

と定める. このとき, $\mathbb{C}Z \oplus \mathbb{C}Z'$ がコンパクトカルタン部分代数であり, $N_+, P_{0,-}, P_{1,-}, X_-$ が正ルートベクトルである. また,

$$E_+ = 4P_{1,+} + 2N_-X_+, \quad E_- = 4P_{1,-} - 2N_-P_{0,-}, \quad U = 2P_{0,+} + P_{1,+}N_- + X_+N_-^2$$

とおく. これら $E_\pm, U$ は以下の議論に合わせたものであり, 実際には Z や Z' も用いて書き下すべきである. 詳しくは [7] を参照.

$p \geq q$ なる $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して, $L(p,q)$ を [7] のものと同じようにとる. この $L(p,q)$ は上記のように正ルートを取った場合, ウェイトが (p,q) の既約最高ウェイト表現に対応する. $p = q$ のとき, $\pi_k = L(k,k)$ とする. このとき, 次のテンソル積を考える:

$$\pi_4 \otimes \pi_6 \otimes \pi_{10} \otimes \pi_{12}.$$

π_k の最高ウェイトベクトルを v_k とかく. このとき, $\pi_4 \otimes \pi_6$ と $\pi_4 \otimes \pi_6 \otimes \pi_{10}$ の元 α, β を

$$\alpha = 6(X_+v_4) \otimes v_6 - 4v_4 \otimes (X_+v_6), \quad \beta = 16E_+(\alpha \otimes v_{10}) - 31(E_+\alpha) \otimes v_{10}$$

と定める. このとき, α, β は最高ウェイトベクトルになる. そして, それぞれ $L(12,10)$, $L(23,21)$ に同型な表現を生成する. 最後に, $\pi_4 \otimes \pi_6 \otimes \pi_{10} \otimes \pi_{12}$ の元

$$\gamma = 32(U\beta) \otimes v_{12} - 5U(\beta \otimes v_{12})$$

を考えることにより, 0 でない写像

$$\pi_{35} \longrightarrow \pi_4 \otimes \pi_6 \otimes \pi_{10} \otimes \pi_{12} \colon X \cdot v_{35} \longmapsto X \cdot \gamma$$

が得られる. この公式により, Rankin-Cohen 括弧積

$$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot] \colon M_4(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \otimes M_6(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \otimes M_{10}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \otimes M_{12}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})) \longrightarrow M_{35}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$$

が得られる.

重さが $4, 6$ の保型形式として, アイゼンシュタイン級数 E_4, E_6 がそれぞれ存在する. また, 重さが $10, 12$ の保型形式 χ_{10}, χ_{12} も存在する. 上記 Rankin-Cohen 括弧積に $E_4, E_6, \chi_{10}, \chi_{12}$ を代入することで, 重さが 35 の正則保型形式が得られる. 重さが 35 であるようなフルモジュラー形式はいわゆる χ_{35} の定数倍しかないため, 構成した保型形式はまさに χ_{35} と定数倍しか違わない. したがって, Rankin-Cohen 括弧積により χ_{35} が得られた.

3. generalized Verma module

本節では generalized Verma module の定義といくつかの性質を述べた後, 主定理の鍵となるテンソル積表現の分岐則について述べる.

3.1. 放物型 BGG 圏 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ と generalized Verma module. まずは放物型 BGG 圏を定義し, その諸性質を述べる. 以下では有限次元ベクトル空間 V に対して V^* を V の双対とする.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の半単純リー環, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分リー環とする. このとき, $\mathfrak{h}$ に関するルート系を $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ とかく. $\triangle$ を単純ルート全体, Φ^+ を正ルート系とおく. $\rho = (1/2)\sum_\alpha \alpha$ と定める.

部分集合 $I \subset \triangle$ を固定する. $\mathbb{Z} \cdot I$ を $\mathfrak{h}^*$ の $\mathbb{Z}$ 上 I で貼られる部分集合とする. このとき, $\Phi_I = \Phi \cup \mathbb{Z} \cdot I$ を Φ の部分ルート系とする. $\Phi_I^+ = \Phi_I \cup \Phi^+$ を部分ルート系 Φ_I の正系とする. すると, $\mathfrak{g}$ の放物型部分リー環 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$ が

$$\bigoplus_{\alpha \in \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_I^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

により定まる. ただし, $\mathfrak{g}_\alpha$ は重さ α の $\mathfrak{g}$ のルート空間である. 放物型部分リー環 $\mathfrak{p}_I$ はレビ分解 $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I\mathfrak{u}_I$ をもつ. ただし,

$$\mathfrak{l}_I = \bigoplus_{\alpha\in\Phi_I}, \qquad \mathfrak{u}_I = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+\setminus\Phi_I^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Λ_I^+ を

$$\Lambda_I^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{for all } \alpha \in I\}$$

とおく. ただし, $\alpha^\vee$ は α の余ルートである. 最高ウェイト理論により, $\lambda \in \Lambda_I^+$ に対して $\mathfrak{l}_I$ の有限次元表現 $L_I(\lambda)$ が定まる. $\mathfrak{u}_I$ が有限次元表現 $L_I(\lambda)$ に自明に作用することにより, $L_I(\lambda)$ は $\mathfrak{p}_I$ の既約表現と考えることができる. したがって, 以下では $L_I(\lambda)$ は $\mathfrak{p}_I$ の既約表現とみなす.

放物型 BGG 圏 $\mathcal{O}^\mathfrak{p}$ とは, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 上の加群全体がなす圏の充満部分圏であり, 対象 M は以下を満たすもの全てである:

($\mathcal{O}^\mathfrak{p}1$) M は有限生成 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-加群.
($\mathcal{O}^\mathfrak{p}2$) $\mathcal{U}(\mathfrak{l}_I)$-加群として, M は既約加群の直和になる.
($\mathcal{O}^\mathfrak{p}3$) M は locally $\mathfrak{u}_I$-有限, つまり, 任意の $v \in M$ に対してある $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $\mathfrak{u}_I^m \cdot v = 0$.

これら BGG 圏 $\mathcal{O}^\mathfrak{p}$ の性質は [4] が詳しい.

$M \in \mathcal{O}^\mathfrak{p}$ と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して, M_μ を重さ μ の重さ空間とする. このとき, $M^\vee$ を, ベクトル空間として $\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*} M_\mu^*$ とする. $f \in M_\mu^*$ を, $\lambda \neq \mu$ と $v \in M_\lambda^*$ に対して $f(v) = 0$ とすることにより, M^* の元とみる. このとき, $f \in M^\vee$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$Xf(v) = -f(X \cdot v), \qquad v \in M$$

とおく. すると, $M^\vee$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-加群となる. この $M^\vee$ を M の反傾表現という. $M^\vee \in \mathcal{O}^\mathfrak{p}$ である.

$\lambda \in \Lambda_I^+$ に対して generalized Verma module $M_I(\lambda)$ を

$$M_I(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_\mathfrak{p} L_I(\lambda)$$

により定める. 一般に, generalized Verma module は $\mathfrak{l}_I$ の有限次元表現だけでなく, 無限次元表現も考えたものも指すが, 本稿では有限次元表現しか考えない. $M_I(\lambda)$ には既約商が一意に存在し, それを $L(\lambda)$ とかく. 定義から明らかに, $M_I(\lambda)$ は $\mathcal{O}^\mathfrak{p}$ の対象である.

$\mathcal{Z}$ を $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中心とする. $\mathcal{Z}$ の指標を無限小指標という. $L(\lambda)$ の無限小指標を χ_λ とかく. このとき, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ はあるワイル群の元 $w \in W$ が存在して $\lambda = w \cdot \mu$ になることに同値である. ここで, $w \cdot \mu = w(\mu + \rho) - \rho$ としている.

M を条件 ($\mathcal{O}^\mathfrak{p}2$) をみたし, Hom 空間 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}_I}(L_I(\lambda), M)$ が任意の $\lambda \in \Lambda_I^+$ に対して有限次元であるとする. このとき, M は $\mathcal{Z}$-有限である. 無限小指標 χ に対して M_χ を χ に関する一般化固有空間とする. つまり, $M_\chi = \{v \in M \mid (z - \chi(z))^m v = 0\, \text{for some } m \text{ and any } z \in \mathcal{Z}\}$. すると, 次の分解を得る:

$$M = \bigoplus_\chi M_\chi.$$

次節では既約加群 $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性や $M_I(\lambda)$ の既約性の判定法をみる.

3.2. first reduction point と unitalizability. 以下では $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とする. このとき, コンパクトカルタンをとる. つまり, コンパクト部分リー環の複素化 $\mathfrak{k}$ のカルタン部分代数で $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数になるものをとる. そのようなものは存在し, ルート系 Φ は

$$\Phi = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

となる. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は $\mathfrak{h}^*$ の Killing 形式に関する直交基底で, 適当に順序を入れたものとしている. 正ルート系 Φ^+ を

$$\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{-(e_i + e_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

により定める. 上記の取り方は, 前節での正ルート系の取り方と同じである. このとき, 単純ルート系 $\triangle$ は

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, -2e_1\}$$

である. $I \subset \triangle$ を

$$I = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$$

とおく. このとき, 対応する放物型部分リー環 $\mathfrak{p}_I$ のレビ部分リー環はコンパクトリー環の複素化 $\mathfrak{k}$ に一致する.

以降考える Verma module は放物型部分リー環 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}$ に関する generalized Verma module に限る. そのため, 単に $N(\lambda)$ とかいたら, $M_I(\lambda)$ を意味する. 本節では既約加群 $L(\lambda)$ のユニタリ化可能性や $N(\lambda)$ の既約性の判定法を考察する. 基本的に [2] に本節の内容は従がっている. ただし, 本稿とは正ルート系の取り方などが異なることに注意されたい.

$\beta \in \Phi^+$ を $\beta = -2e_n$, $\zeta \in \mathfrak{h}^*$ を $\zeta = -(e_1 + \cdots + e_n)$ とおく．本節の正ルートの取り方により，$\rho = -e_1 - 2e_2 - \cdots - ne_n$ となる．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して複素数 s を，$\lambda_0 = \lambda + s\zeta$ の e_n の係数が n であるように選ぶ．以下では，λ_0 というと，$\Lambda_I^+ \cap \mathbb{R}^n$ の元であり，e_n の係数が n であるとする．λ_0 の e_i の係数を λ_i とかく．λ_0 に対して Φ の部分ルート系 $Q(\lambda_0)$ と $R(\lambda_0)$ を以下のように定義する．$q = \#\{i \mid \lambda_i = \lambda_n\}, r = \#\{i \mid \lambda_i = \lambda_n + 1 \text{ or } \lambda_n\}$ とおく．このとき，$Q(\lambda_0)$ を $\{e_{n-q+1} - e_{n-q+2}, \ldots, e_{n-1} - e_n, -2e_n\}$ で貼られる Φ の部分ルート系とする．すると，$Q(\lambda_0)$ は $\mathfrak{sp}_{2q}(\mathbb{C})$ のルート系と同型である．同様に，$R(\lambda_0)$ を $\{e_{n-r+1} - e_{n-r+2}, \ldots, e_{n-1} - e_n, -2e_n\}$ で貼られる Φ の部分ルート系とする．すると，$Q(\lambda_0)$ は $\mathfrak{sp}_{2r}(\mathbb{C})$ のルート系と同型である．次に，有理数数 $A(\lambda_0)$ と $B(\lambda_0)$ を

$$A(\lambda_0) = (q+1)/2, \qquad B(\lambda_0) = (q+r)/2$$

と定める．このとき，次が成立する:

Theorem 3.1 (Theorem 2.5 in [2])**.** z を実数とする．上記記号のもとで，以下が成立する:
(1) $z \leq A(\lambda_0)$ のとき，generalized Verma module $N(\lambda_0 + z\zeta)$ は既約．
(2) $N(\lambda_0 + z\zeta)$ が離散系列表現となることと，$z < 0$ は同値．離散系列表現の極限となるのは $z = 0$ に相当する．
(3) $N(\lambda_0 + z\zeta)$ は $z = A(\lambda_0)$ で可約．
(4) 既約商 $L(\lambda_0 + z\zeta)$ がユニタリ化可能であることと，$z \leq A(\lambda_0)$ または，$2z \in \mathbb{Z}$ かつ $z \leq B(\lambda_0)$ が成立することが同値．

より詳細な $N(\lambda_0 + \zeta)$ の既約性の判定法は [4, Chap. 9] 参照．上記は既約性についてはあくまで first reduction point と呼ばれる点 $A(\lambda_0)$ の計算方法しか与えていないが，非常に計算しやすく，かつ分かりやすいものになっている．本稿の計算には first reduction point で十分である．

3.3. **テンソル積表現の分岐則．** 本節では前節の記号を引き継ぎ，さらに $n = 2$ とする．本節の主な対象は次のテンソル積である:

$$M = N(1/2, 1/2)^\vee \otimes L(1/2, 1/2)^\vee.$$

以下では上記の加群の $\mathfrak{g}$-加群としての分解を考察する．問題点の一つとして，上記加群は BGG 圏の対象にならないことが挙げられる．しかし，$\mathcal{Z}$ の作用についてまず分解することにより，BGG 圏を用いることができる．

前節の定理 3.1 から，$N(1/2, 1/2)$ は可約であり，$N(5/2, 5/2)$ は既約である．また，簡単な計算から，$(1/2, 1/2)$ の W による dot-action による orbit で Λ_I^+ に属するものは

$$\{(1/2, 1/2), (5/2, 5/2), (3/2, 1/2), (5/2, 3/2)\}$$

である．最高ウェイト理論により，$\mathfrak{k}$ の既約表現は $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ で $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をみたすものによりパラメータづけられる．λ に対応する既約表現を ρ_λ とかく．このとき，$\mathfrak{k}$ 上の加群として

$$N(\lambda) \cong \rho_\lambda \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{p}_+) \cong \rho_\lambda \otimes \left(\bigoplus_{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in 2\mathbb{Z}^2, \lambda_1 \geq \lambda_2} \rho_{(\lambda_1, \lambda_2)} \right)$$

が成立する．そのため，$\rho_{(3/2,1/2)}$ と $\rho_{(5/2,3/2)}$ が $N(1/2, 1/2)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$ の部分 $\mathfrak{k}$-加群として実現できないことがわかる．よって，

$$0 \longrightarrow N(5/2, 5/2) \longrightarrow N(1/2, 1/2) \longrightarrow L(1/2, 1/2) \longrightarrow 0$$

をえる．そのため，

$$L(1/2, 1/2)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} \cong \bigoplus_{m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rho_{(2m+1/2, 1/2)}$$

をえる．したがって，$\mathfrak{k}$ 上の加群として以下を得る:

$$\begin{aligned} N(1/2, 1/2)^\vee \otimes L(1/2, 1/2)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} &\cong \left(\rho_{(1/2,1/2)} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{p}_+)\right) \otimes \left(\bigoplus_{m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}} \rho_{(2m+1/2, 1/2)} \right) \\ &\cong \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \rho_{(2m+1, 1)} \right) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{p}_+)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}. \end{aligned}$$

とくに，M は $\mathcal{Z}$-有限である．そこで，無限小指標 χ に対して M_χ を考える．まず，$\mathfrak{k}$ 上の表現として

$$M|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N(2m+1, 1)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}$$

である．そのため, 容易に, $m \geq 1$ に対して $M_{\chi_{(2m+1)}}$ の半単純化は $L(2m+1,1) \oplus L(2m+1,3)$ であり, $M_{\chi_{(1,1)}} \cong N(1,1) \cong L(1,1)$ がわかる．ここで, $m \geq 1$ に対して

$$0 \longrightarrow N(2m+1,3) \longrightarrow N(2m+1,1) \longrightarrow L(2m+1,1) \longrightarrow 0$$

が成り立つことを用いた．より精密には, 次が成立する:

v を $L(1/2,1/2)$ の最高ウェイトベクトルとする．当然, v のウェイトは $(1/2,1/2)$ である．$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の元 D_+, D_- を

$$D_+ = P_{1+}^2 - 4X_+P_{0+}, \qquad D_- = P_{1-}^2 - 4X_-P_{0-}$$

により定義する．ウェイトが (p,q) であるベクトル u が $N_+u = 0$ をみたすとき, $D_\pm u$ はウェイトが $(p \pm 2, q \pm 2)$ かつ $N_+(D_\pm u) = 0$ をみたす．ベクトル $w \in N(1/2,1/2)^\vee$ を $N_+w = 0$ かつ $D_-w = v$ を満たすようにとる．

Lemma 3.2. 正の偶数 m と $i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $2i+2j = m$ に対して

$$a_{i,j} = \frac{m+3}{m-2i+3}(-1)^i \binom{m+1}{2i}, \qquad b_{i,j} = \frac{(-1)^{i+1}}{6(m+2)} \binom{m+1}{2i},$$

と定める．このとき, $\mathfrak{g}$-加群として, 次の同型を得る:

$$L\,(1/2,1/2) \otimes N\,(1/2,1/2)^\vee \cong \left(\bigoplus_{m \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}} N(m+3,1)^\vee \right) \oplus L(1,1).$$

さらに, ベクトル

$$\sum_{2i+2j=m} a_{i,j}\, X_+^i v \otimes X_+^j w \,+ \sum_{2i+2j=m} b_{i,j}\, D_+(X_+^i v \otimes X_+^j D_- w)$$

は $N(m+3,1)^\vee$ を生成する．

Proof. $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$-加群として, 次の同型を得る:

$$\begin{aligned} L\,(1/2,1/2) \otimes N\,(1/2,1/2)^\vee |_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} &\cong \left(\bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \rho_{(2\ell+1/2,1/2)} \right) \otimes \left(\rho_{(1/2,1/2)} \otimes \bigoplus_{\substack{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \\ p \geq q \geq 0}} \rho_{(2p,2q)} \right) \\ &\cong \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \rho_{(2\ell+1,1)} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{p}_+)|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} \\ &\cong \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N(2\ell+1,1)^\vee|_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

直接計算から, ベクトル

$$\sum_{2i+2j=m} a_{i,j}\, X_+^i v \otimes X_+^j w \,+ \sum_{2i+2j=m} b_{i,j}\, D_+(X_+^i v \otimes X_+^j D_- w)$$

は $N(m+1,1)^\vee$ を生成することが分かる．よって, 偶数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $N(m+1,1)^\vee$ はテンソル積表現 $L\,(1/2,1/2) \otimes N\,(1/2,1/2)^\vee$ の部分加群となる．つまり, 次の埋め込みを得る:

$$L(1,1) \oplus \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N(2\ell+3,1)^\vee \longrightarrow L\,(1/2,1/2) \otimes N\,(1/2,1/2)^\vee.$$

generalized Verma module $N(1,1)$ は既約であるため, 自明な同型 $N(1,1) \cong N(1,1)^\vee \cong L(1,1)$ がある．したがって, $\mathfrak{k}$-type の重複度を比較することで, 上記埋め込みは $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-加群として同型を誘導することがわかる． □

4. アイゼンシュタイン級数

本節ではアイゼンシュタイン級数の定義をし, 志村によるフーリエ係数の計算結果を述べる．また, 誘導表現の組成列をみることにより, アイゼンシュタイン級数が生成する $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-加群が直既約かつ可約となるものが構成できることを $n=2$ の場合にみる．

4.1. **定義.** 本節ではジーゲルアイゼンシュタイン級数を定義する. $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ とおく. $\mathbb{Q}$ の素点 v に対して $G_v = G(\mathbb{Q}_v)$ とおく.

このとき, $\widetilde{G_v}$ を集合として

$$G_v \times \{\pm 1\}$$

であり, 群演算は

$$(g_1, \varepsilon_1)(g_2, \varepsilon_2) = (g_1 g_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2 c(g_1, g_2))$$

とする. ただし, $c(\cdot, \cdot)$ は Rao の 2-コサイクルである ([8]). $\mathbf{pr}$ を射影 $\mathbf{pr}\colon \widetilde{G_v} \longrightarrow G_v$ とする. $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $K = \prod_v K_v$ を以下で定義する: v が有限素点のとき,

$$K_v = G(\mathbb{Z}_v),$$

v が無限素点のとき

$$K_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, {}^t aa + {}^t bb = 1_n \right\}$$

と定める. $\widetilde{K} = \mathbf{pr}^{-1}(K)$ とおく.

P を G のジーゲル放物型部分群とする. つまり, 集合としては

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \in G \middle| \, a \in \mathrm{GL}_n, b \in \mathrm{Sym}_n \right\}$$

に一致する. χ を $\widetilde{P(\mathbb{A})} = \mathbf{pr}^{-1}(P(\mathbb{A}))$ の指標とおく. 複素数 s に対して $I(\mu, s) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{P(\mathbb{A})}}^{\widetilde{G(\mathbb{A})}}(\chi|\cdot|^s)$ を

$$f(nmg) = \chi(m)|\det a|^{s+(n+1)/2} f(g), \qquad n \in N(\mathbb{A}),\, m = \mathrm{diag}((a, {}^t a^{-1}), \varepsilon) \in \widetilde{M(\mathbb{A})},\, g \in G(\mathbb{A})$$

なる C^∞-級関数全体とする. $I(\mu, s)$ の section Φ_s をとる. Φ_s が standard とは, $\Phi_s|_{\widetilde{K}}$ が s によらないことをいう. standard section Φ_s に対してアイゼンシュタイン級数 $E(g, s, \Phi)$ を

$$\sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \Phi_s(\gamma g)$$

により定める. s の実部が十分大きいとき, 上記の和は絶対収束し, 全 s-平面に解析接続する. さらに関数等式も成立する. 志村は [11, §16] において, 特殊な section Φ_s に対してアイゼンシュタイン級数のフーリエ級数を求めた.

4.2. **重さが $(n+3)/2$ の場合.** 重さが $(n+3)/2$ になる場合においてのみフーリエ係数の明示式を与える. ここで, n は 4 を法として 2 と合同であるとする. n に関する条件から, section は $\chi = 1$ となるようなもの, つまり, $\mathrm{Ind}_{\widetilde{P(\mathbb{A})}}^{\widetilde{G(\mathbb{A})}}|\cdot|^s$ の section としてよいことが分かる (cf. [11, §16.24(b)]). 具体的には, section $\Phi_s = \otimes_v \Phi_{v,s}$ は $v \neq 2, \infty$ のときには不分岐なものを, $v = \infty$ のときはウェイトが $(n+3)/2$ のものを, $v = 2$ では少し特殊な取り方をする. 具体的な取り方については [11, §16] 参照この 2 での取り方がうまくいくような条件の一つが $n \equiv 2 \pmod 4$ といえる.

Remark 4.1. 本稿において, メタプレクティック群は二重被覆であるが, 志村氏は S^1 で拡大したものを考えている. また, 誘導表現のパラメータ s が modulas などずれているため, 見た目は [11, §16] と多少異なる standard section を選んでいるようにみえるかもしれないが, 最終的に同じものになる. フーリエ係数の具体的な計算はほぼすべての点で志村氏のものと同じであるため, 元論文等や本 [11] などを参考にされたい.

$n = 2$ としたとき, このような standard section Φ_s に対するアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数は次のようになる:

Lemma 4.2. $n = 2$ とする. 志村氏の構成したウェイト 5/2 のジーゲルアイゼンシュタイン級数 E^* のフーリエ係数を

$$E^*(x + \sqrt{-1}\, y) = \sum_{h \geq 0} c(h, y) \exp(2\pi\sqrt{-1}\, \mathrm{tr}(h(x + \sqrt{-1}\, y))), \qquad x + \sqrt{-1}\, y \in \mathfrak{H}_n$$

とかく. このとき, 以下が成立する:

(1) $c((\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}), y)$ が 0 でないとすると, $a, d \in (1/2)\mathbb{Z}$ と $b, c \in \mathbb{Z}$ が成立する.
(2) h が正定値ならば, フーリエ係数は $c(h, y)$ は y によらない, i.e., $c(h, y)$ は定数.
(3) $h = 0$ のとき,

$$c(0, y) = \frac{4}{\pi^2 \det y}$$

をえる.

(4) $h \neq 0$ が特異行列のとき, フーリエ係数 $c(h,y)$ は $\mathfrak{H}_n$ 上の概正則関数になる. さらに h が $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と表され, $c(h,y)$ が 0 でないとき, ある整数 $m \neq 0$ が存在して $a = m^2/2$ となる. また,

$$c\left(\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y\right) = \frac{8(1+4\pi y_1)}{\pi^2 \det y}$$

と

$$c\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y\right) = \frac{8(1+16\pi y_1)}{\pi^2 \det y},$$

が成立する. ただし, $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$.

志村氏はもっと一般の場合に上記のような公式を [11, §16] で証明している.

5. 概正則保型形式の構成

志村によるアイゼンシュタイン級数の計算と Rankin-Cohen bracket の計算を用いて概正則保型形式を構成する.

5.1. **Rankin-Cohen 括弧積とその計算例.** X_+ と $D_\pm$ を $\mathfrak{H}_2$ 上の微分作用素で, [7, section 3.3] で定義されているものとする. Γ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q})$ の合同部分群とする. $N^*_{5/2}(\Gamma) \subset N_{5/2}(\Gamma)$ をウェイトが 5/2 の概正則保型形式のうち, $N(1/2,1/2)^\vee$ または $L(5/2,5/2)$ を生成するもので貼られた空間とする. 補題 3.2 より, Rankin-Cohen 括弧積

$$[\,,\,]_m \colon M_{1/2}(\Gamma) \otimes N^*_{5/2}(\Gamma) \longrightarrow N_{\rho_{(m+1,3)}}(\Gamma)$$

を

$$f \otimes g \longmapsto \sum_{2i+2j=m, i,j \geq 0} a_{i,j}\, X_+^i f \otimes X_+^j g + \sum_{2i+2j=m, i,j \geq 0} b_{i,j}\, D_+(X_+^i f \otimes X_+^j D_- g)$$

により定義できる. ここで, 係数 $a_{i,j}$ と $b_{i,j}$ は補題 3.2 のものと同じである. 括弧積 $[\,,\,]_m$ の像は $N(m+1,1)^\vee$ または $L(m+1,3)$ を生成する. もし $[f,g]_m$ が $L(m+1,3)$ を生成するならば, $[f,g]_m$ は正則保型形式である. 加群 $N(m+1,1)^\vee$ を生成する保型形式を見つけるためには, 概正則だが正則ではない $N^*_{5/2}(\Gamma)$ の元を見つければよい.

E^* を重さが 5/2 である次数 2 の志村氏が構成したジーゲルアイゼンシュタイン級数とする. このとき, 次を得る:

Proposition 5.1 (Theorem 5.5 in [3])**.** M を E^* が生成する $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-加群とする. 加群 M は反傾表現 $N(1/2,1/2)^\vee$ に同型である.

$E^*(Z) = E^*(X + \sqrt{-1}\,Y)$ のフーリエ係数は

$$\frac{4}{\pi^2 \det Y)} + 8\left(\frac{1-4\pi y}{\pi^2 \det Y}\right)\exp(\pi i \tau) + 8\left(\frac{1-16\pi y}{\pi^2 \det Y}\right)\exp(4\pi i \tau) + \cdots,$$

となる. ここで,

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y & v \\ v & y' \end{pmatrix}.$$

D_- の定義から, 正則保型形式

$$D_- E^*(z) = -24\pi^{-2} - 48\pi^{-2}\exp(\pi\sqrt{-1}\,\tau) - 48\pi^{-2}\exp(4\pi\sqrt{-1}\,\tau) + \cdots$$

をえる. この正則保型形式はウェイトが 1/2 である. すると, 保型形式 $\langle [D_- E^*, E^*]_m, v^* \rangle$ のフーリエ係数は

$$\pi^{-3}\frac{2^8 \cdot 3}{m+2}(m-2+4(m+1)(-1)^{m/2+1})(-2\pi)^{m/2}\left(\frac{y}{\det Y}\right)\exp(\pi\sqrt{-1}\,\tau) + \cdots$$

となる. ここで, v^* は $\rho_{(m,1)}$ の反傾表現の最低ウェイトベクトルである. 明らかに, 全ての偶数 m に対して, 上記保型形式は 0 ではなく, 正則でもない. まとめると, 次を得る:

Theorem 5.2. 上記までの記号のもとで, 保型形式 $[D_- E^*, E^*]_m$ は $N(m+1,1)^\vee$ をすべての偶数 $m \geq 0$ に対して生成する.

よって, 主定理が得られた.

References

[1] H. Aoki and T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, Int. J. Math. **16**, No. 3 (2005) 249-279.

[2] T. Enright, R. Howe, and N. Wallach, *A classification of unitary highest weight modules*, in Proceedings of the University of Utah Conference 1982, edited by P. C. Tombi, Progress in Mathematics (Birkhauser, Basel, 1983).

[3] S. Horinaga, On the repsentations generated by Eisenstein series of weight $(n+3)/2$, J. Number Theory. **201**(2019), 206-227..

[4] James Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, volume 94 of *Graduate students in mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I. 2008.

[5] T. Ibukiyama. Vector valued Siegel modular forms of symmetric tensor weight of small degrees. Comm. Math. Univ. Sancti Pauli **61** (2012), 51-75.

[6] Ameya Pitale, Abhishek Saha, and Ralf Schmidt, Representations of $SL_2(\mathbb{R})$ and nearly holomorphic modular forms. In *Proceedings of RIMS Workshop on Modular forms and automorphic representations*, RIMS KôKYũroku, No. 1973, pages 141-153. Res Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 215.

[7] Ameya Pitale, Abhishek Saha, and Ralf Schmidt, Lowest weight modules of $Sp_4(\mathbb{R})$ and nearly holomorphic Siegel modular forms (expanded version). arXiv:1501.00524.

[8] Ranga Rao, R. On some explicit formulas in the theory of Weil representation. Pacific J. Math. 157 (1993), no. 2, 335–371.

[9] G. Shimura, On Eisenstein series, Duke Math. J. **50** (1982), 417-476.

[10] G. Shimura, Invariant differential operators on hermitian symmetric spaces, Ann. of Math. **115** (1990), 237-272.

[11] G. Shimura, *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, volume 82 of *Mathematical surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[12] D. Zagier, Modular forms and differential operators, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **104** (1994), 57-75.